Тәжірибелік сабақ

Тақырып 11. Функция дифференциалы және оны жуықтап есептеуге қолдану. Дифференциалданатын функциялар қасиеттері. Жанама мен нормаль теңдеулері. Дифференциалдық есептеудің негізгі теоремалары.

1. $y=\dfrac{3x^6+4x^4-x^2-2}{15\sqrt{1+x^2}}$ функциясының dy –дифференциалын табыңыз.

Шешуі. Бөлшектен туынды алу ережесін қолданамыз.

$$y=\left(\frac{3x^6+4x^4-x^2-2}{15\sqrt{1+x^2}}\right)'=$$

$$=\frac{1}{15}\cdot\frac{\left(3x^6+4x^4-x^2-2\right)'\sqrt{1+x^2}-\left(3x^6+4x^4-x^2-2\right)\left(\sqrt{1+x^2}\right)'}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2}=$$

$$=\frac{\left(18x^5+16x^3-2x\right)\sqrt{1+x^2}-\left(3x^6+4x^4-x^2-2\right)\cdot\dfrac{1\cdot 2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{15\left(1+x^2\right)}=$$

$$=\frac{x\left(18x^4+16x^2-2\right)\left(1+x^2\right)-x\left(3x^6+4x^4-x^2-2\right)}{15\left(1+x^2\right)\sqrt{1+x^2}}=$$

$$=\frac{x\left(18x^4+16x^2-2+18x^6+16x^4-2x^2-3x^6-4x^4+x^2+2\right)}{15\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}=$$

$$=\frac{x\left(15x^6+30x^4+15x^2\right)}{15\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}=\frac{15x^3\left(x^4+2x^2+1\right)}{15\sqrt{(1+x^2)^3}}=\frac{x^3\left(x^2+1\right)^2}{\left(1+x^2\right)\sqrt{1+x^2}}=x^3\sqrt{1+x^2}$$

Жауабы: $dy=x^3\sqrt{1+x^2}\,dx$

2. $y=\dfrac{e^{x^2}}{1+x^2}$ функциясының dy –дифференциалын табыңыз.

Шешуі. Бөлшектен туынды алу ережесін қолданамыз

$$y'=\left(\frac{e^{x^2}}{1+x^2}\right)'=\frac{\left(e^{x^2}\right)'\cdot\left(1+x^2\right)-e^{x^2}\left(1+x^2\right)'}{\left(1+x^2\right)^2}=$$

$$\frac{e^{x^2}\cdot 2x\left(1+x^2\right)-e^{x^2}\cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{2xe^{x^2}\left(1+x^2-1\right)}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{2x^3e^{x^2}}{\left(1+x^2\right)^2}$$

Жауабы: $dy=\dfrac{2x^3e^{x^2}}{\left(1+x^2\right)^2}dx$

3. $y=x\sqrt{x^2-1}+\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|$ функциясының dy –дифференциалын табыңыз.

Шешуі. $\mathrm{dy}=\mathrm{y}'\mathrm{dx}$

$$y' = (x)'\sqrt{x^2-1} + x\left(\sqrt{x^2-1}\right)' + \frac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)'}{x+\sqrt{x^2-1}} = \sqrt{x^2-1} + \frac{x2x}{2\sqrt{x^2-1}} +$$

$$+\frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}} = \frac{x^2-1+x^2}{\sqrt{x^2-1}} + \frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)} = \frac{2x^2-1}{\sqrt{x^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} =$$

$$= \frac{2x^2}{\sqrt{x^2-1}}$$

Жауабы: $dy = \frac{2x^2 dx}{\sqrt{x^2-1}}$

4. $y = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$ функциясына дифференциалды жуықтап есептеп формуласын қолданып, x=1,58 нүктесіндегі мәнін есептеңіз.

Шешуі. $y(x+\Delta x) \approx y(x) + y'(x)\Delta x$ формуласын қолданамыз.

x=1,5; x+ $\Delta x = 1{,}58 \Rightarrow \Delta x = 1{,}58 - 1{,}5 = 0{,}08$, $y = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$,

$y\,(1.5) = \frac{1}{\sqrt{2\cdot 1{,}5+1}} = \frac{1}{2}$; $y' = -\frac{1\cdot 2}{2\sqrt{(2x+1)^3}} = -\frac{1}{\sqrt{(2x+1)^3}}$;

$y'(1.5) = -\frac{1}{\sqrt{(2\cdot 1{,}5+1)^3}} = -\frac{1}{8}$.Ендеше $y(1{,}58) \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{8}\cdot 0{,}08 = 0{,}5 - 0{,}01 = 0{,}49$.

Жауабы: $y(1{,}58) \approx 0{,}49$

5. $y = 6\sqrt[3]{x} - \frac{16}{3}\sqrt[4]{x}$ қисығына x_0=1 нүктесінде жүргізілген жанама мен нормальдің теңдеулерін жазыңыз.

Шешуі. $y = y_0 + y'(x_0)(x-x_0)$ жанаманың және $y = y_0 - \frac{1}{y'(x_0)}(x-x_0)$ нормальдің теңдеулерін жазу үшін қажетті шамаларды анықтаймыз: $y' = 6\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} - \frac{16}{3}\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{4}{3\sqrt[4]{x^3}}$ $y'(1) = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$; $y\,(1) = 6 - \frac{16}{3} = \frac{2}{3}$. Ендеше жанаманың теңдеуі: $y = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}(x-1)$ немесе ықшамдап $3y = 2 + 2x - 2 \Rightarrow 2x - 3y = 0 \Rightarrow y = \frac{2}{3}x$ аламыз. Нормальдің теңдеуі: $y = \frac{2}{3} - \frac{3}{2}(x-1)$ немесе $6y = 4 - 9x + 9 \Rightarrow 9x + 6y - 13 = 0$

Жауабы: $y = \frac{2}{3}x$, $9x + 6y - 13 = 0$.

6.Келесі есептерді өз беттеріңмен шығарыңдар

1. Келесі функциялардың туындыларын тап:

а) $y = 3x^3 5\sqrt[3]{x^5} - 4/x^3$;

б) $y = x^3 \sin x \cdot \ln x$;

в) $y = \sqrt[7]{x^5} - 2/x^4 + 7x^6$;

д) $y = (x^9 + 1)\cos 5x$;

е). $y = 4\sqrt{x} + 4/\sqrt{x} + 3x^2$;

2. $y = \ln(x^2 - 4x + 4)$ қисығына $x_0 = 1$ нүктесінде жүргізілген жанама мен нормальдің теңдеулерін жаз. (Жауабы: $2x + y - 2 = 0$; $x - 2y - 1 = 0$.)

3. Туындының анықтамасын пайдаланып ((2) формуласын қара), $y = (3x-1)/(2x+5)$ функциясының туындысын тап. (Жауабы: $y' = 17/(2x+5)^2$.)

4. Материалық нүктенің t сек аралығында жүрген жолы $s = \frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{3}t^3 + 2t + 1$ (s – метрмен өлшенеді). Берілген нүктенің t = 0; 1; 2 с уақыт мезетіндегі қозғалысының жылдамдығын тап. (Жауабы: 2 м/с; 2 м/с; 6 м/с.)

5. Келесі функциялардың туындыларын тап.

а) $y = x\sin^3 3x$; б) $y = \sqrt{\dfrac{\cos^2 x + 1}{\sin 2x + 1}}$;

в) $y = (2^{\cos 3x} + \sin 3x)^3$; г) $y = x\cos^2 x \cdot \ell^{x^2}$.

д) $y = x^3 e^{tg 3x}$; е) $y = (\sin^3 x + \cos^3 2x)^2$;

ж) $y = \ln(x^4 - \sin^3 x)$; з) $y = x\sin 7x \cdot tg^2 x$.